
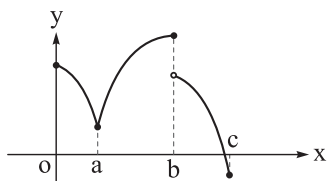


		رشته: ریاضی و فیزیک	سوالات آزمون شبیه‌ساز نهایی: حسابان (۲)
		تاریخ آزمون:	نام و نام خانوادگی:
		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه
		مرکز ارزشیابی خیلی سبز	منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی
تعداد صفحه: ۲	سؤالات (پاسخ‌نامه دارد). - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.		ردیف
۰/۷۵	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید. الف) اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ ، از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود. ب) اگر برای هر $x \in D_f$ ، $f'(x) < 0$ ، آن‌گاه تابع f در دامنه‌اش نزولی اکید است. پ) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.	۱	
۰/۷۵	جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. الف) دامنه تابع $f(x) = \tan(\pi x)$ برابر است. ب) اگر $x = 2$ مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{3x+1}{mx-1}$ باشد، معادله مجانب افقی آن به صورت است. پ) اگر $f(1) = -1$ ، $f'(1) = 3$ و $g(1) = g'(1) = 2$ ، حاصل $(\frac{f}{g})'(1)$ برابر است.	۲	
۱/۵	شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار تابع $g(x) = -f(1-x)$ را رسم کنید و وضعیت یکنوایی آن را در بازه‌های مختلف بررسی کنید. 	۳	
۱/۲۵	مقادیر a و b را به گونه‌ای بیابید که چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 5x + b$ بر $x^2 - x - 2$ بخش پذیر باشد.	۴	
۱/۲۵	ضابطه تابع مثلثاتی به شکل $y = a \cos(bx) + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن 4π ، مقدار ماکزیم آن 5 و مقدار مینیم آن برابر -3 باشد.	۵	
۱/۵	معادله مثلثاتی $\sin x \cos x \cos 2x = \frac{1}{8}$ را حل کنید و جواب‌های واقع در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ را به دست آورید.	۶	
۱/۲۵	حد توابع زیر را به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است) الف) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{[x] - \cos x}{1 - \sin x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 1}{2x - 3x^3 + \sqrt{x}}$	۷	
۱/۵	مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^3 + 4x}$ را بیابید و سپس نمودار تابع f را در اطراف مجانب قائم آن رسم کنید.	۸	
۱	معادله نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = x^2 - 4 $ را در نقطه به طول $x = -2$ بنویسید.	۹	
۰/۵	سهمی مقابل، نمودار تابع f است. نمودار تابع مشتق آن را رسم کنید. 	۱۰	

		تاریخ آزمون:	رشته: ریاضی و فیزیک	سوالات آزمون شبیه‌ساز نهایی: حسابان (۲)
		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه	نام و نام خانوادگی:
		تعداد صفحه: ۲	مرکز ارزشیابی خیلی سبز	منطبق بر رویکرد جدید امتحانات نهایی
نمره	سوالات (پاسخ‌نامه دارد) - استفاده از ماشین حساب ساده مجاز است.			ردیف
۲	<p>مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)</p> <p>الف) $f(x) = \frac{(7x^2 - 4x)^9}{\sqrt{6x-1}}$</p> <p>ب) $g(x) = 5 \tan(\pi x) - \cos^6(x^2 - x)$</p>			۱۱
۱		مشتق‌پذیری تابع $f(x) = x^2 - 1 2x $ را در $x = 1$ بررسی کنید.		۱۲
۱/۲۵		کنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40 \left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$ به دست آید، تعیین کنید در چه لحظه‌ای، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم، برابر آهنگ متوسط آن در بازه زمانی $[0, 100]$ می‌شود؟		۱۳
۱		با رسم جدول تغییرات نشان دهید که تابع $f(x) = -2x^3 + x^2 + 4x + 1$ در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است.		۱۴
۱		شکل مقابل نمودار تابع f است. طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق را در صورت وجود بیابید.		۱۵
۱		اگر $x = 2$ طول نقطه ماکزیمم نسبی و $x = 1$ طول نقطه عطف تابع f با ضابطه $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ باشد، a و b را به دست آورید.		۱۶
۱/۵		جدول رفتار و نمودار تابع $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ را رسم کنید.		۱۷
۲۰	جمع نمره	«سربلند و پیروز باشید»		

نام:

نام خانوادگی:

شهر / حوزه:

تاریخ آزمون:

ساعت شروع:

بسمه تعالی

آزمون تشریحی خیلی سبز

حسابان (۲)

ریاضی و فیزیک

دوازدهم

صفحه ۱ از ۳

کد پاسخبرگ:



ضمن بررسی اطلاعات هویتی خود، از تغییر اطلاعات چاپ شده جداً خودداری نمایید و در صورت وجود مغایرت، به مسئول حوزه اطلاع دهید.
نوشتن پاسخ سؤالات پشت صفحه، قابلیت تصحیح نخواهد داشت، لذا از نوشتن پاسخ سؤالات در پشت برگه پرهیز شود.

توجه: پاسخ سؤالات را در محل های تعیین شده و مقابل شمارهها بنویسید.

۰/۷۵ نمره (ب) (پ)	۱- الف)
۰/۷۵ نمره (ب) (پ)	۲- الف)
۱/۵ نمره		۳- .
۱/۲۵ نمره		۴- .
۱/۲۵ نمره		۵- .
۱/۵ نمره		۶- .

«ادامه پاسخبرگ در صفحه بعد»

نام:

نام خانوادگی:

شهر / حوزه:

تاریخ آزمون:

ساعت شروع:

بسمه تعالی

آزمون تشریحی خیلی سبز

حسابان (۲)

ریاضی و فیزیک

دوازدهم

صفحه ۲ از ۳

کد پاسخبرگ:



۷- الف)

۱/۲۵ نمره

ب)

۸-

۱/۵ نمره

۹-

۱ نمره

۱۰-

۰/۵ نمره

۱۱- الف)

۲ نمره

ب)

«ادامه پاسخبرگ در صفحه بعد»

نام:

نام خانوادگی:

شهر / حوزه:

تاریخ آزمون:

ساعت شروع:

بسمه تعالی

آزمون تشریحی خیلی سبز

حسابان (۲)

ریاضی و فیزیک

دوازدهم

صفحه ۳ از ۳

کد پاسخبرگ:



تجربہ ریاضی | آسان

۱۲-

۱ نمره

۱۳-

۱/۲۵ نمره

۱۴-

۱ نمره

۱۵-

۱ نمره

۱۶-

۱ نمره

۱۷-

۱/۵ نمره

۲۰

جمع نمره

«موفق باشید»

حسابان ۲

۱

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. (۷۵٪ نمره)

- الف) اگر $۰ < k < ۱$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ ، از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ حاصل می‌شود.
 ب) اگر برای هر $x \in D_f$ ، $f'(x) < ۰$ ، آن‌گاه تابع f در دامنه‌اش نزولی اکید است.
 پ) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.

راهنمای تصحیح

الف) درست (۲۵٪ صفت ۹)

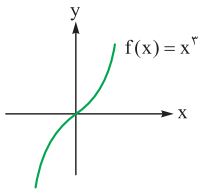
ب) نادرست (۲۵٪ صفت ۱۲)

پ) نادرست (۲۵٪ صفت ۱۳)

پاسخ خیلی تشریحی

الف) تغییرات روی محور x ها به صورت وارونه عمل می‌کند. به طور مثال وقتی $k = \frac{1}{۲}$ باشد، برای رسم نمودار $y = f(\frac{1}{۲}x)$ باید طول نقاط نمودار $y = f(x)$ را دو برابر کنیم. یعنی نمودار $y = f(\frac{1}{۲}x)$ از انبساط افقی $y = f(x)$ به دست می‌آید.

ب) این حکم وقتی برقرار است که f در دامنه‌اش پیوسته باشد. به طور مثال در تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ ، داریم $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < ۰$ ولی این تابع روی دامنه‌اش غیریکنوا است.
 پ) به طور مثال تابع $f(x) = x^3$ صعودی اکید است ولی در $x = ۰$ نقطه عطف دارد.



جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. (۷۵٪ - نمره)

الف) دامنه تابع $f(x) = \tan(\pi x)$ برابر است.

ب) اگر $x = 2$ مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{3x+1}{mx-1}$ باشد، معادله مجانب افقی آن به صورت است.

پ) اگر $f(1) = -1$ ، $f'(1) = 3$ و $g(1) = g'(1) = 2$ ، حاصل $(\frac{f}{g})'(1)$ برابر است.

راهنمای تصحیح

الف) $x \neq k + \frac{1}{\pi} \mid k \in \mathbb{Z}$ یا $\mathbb{R} - \{k + \frac{1}{\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (صفحه ۳۲)

ب) $y = 6$ (صفحه ۶۹)

پ) ۲ (مشابه کار در کلاس ۲ - صفحه ۹۵)

پاسخ خیلی تشریحی

الف) دامنه تابع $f(x) = \tan(g(x))$ ، اعضای از دامنه تابع g هستند که در آن داشته باشیم:

$$g(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{+\pi} x \neq k + \frac{1}{\pi}; k \in \mathbb{Z} \text{ یا } D_f = \mathbb{R} - \{k + \frac{1}{\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{بنابراین:}$$

ب) $x = 2$ باید ریشه مخرج کسر باشد، پس:

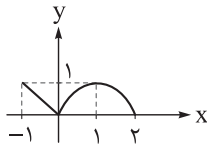
$$2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{3x+1}{\frac{1}{2}x-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{\frac{1}{2}x} = 6 \Rightarrow y = 6 \text{ : مجانب افقی}$$

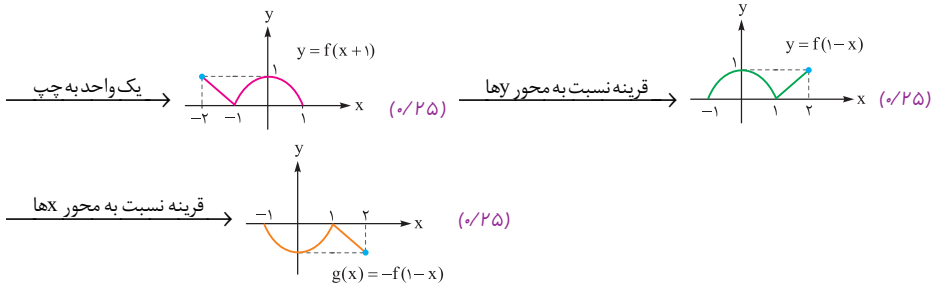
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{(g(1))^2} = \frac{3 \times 2 - 2 \times (-1)}{2^2} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{(پ)}$$

شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار تابع $g(x) = -f(1-x)$ را رسم کنید و وضعیت یکنوایی آن را

در بازه‌های مختلف بررسی کنید. (۱/۵ نمره)



راهنمای تصحیح <<



$[-1, 0] \rightarrow$ نزولی اکید (۰/۲۵)

$[0, 1] \rightarrow$ صعودی اکید (۰/۲۵)

$[1, 2] \rightarrow$ نزولی اکید (۰/۲۵)

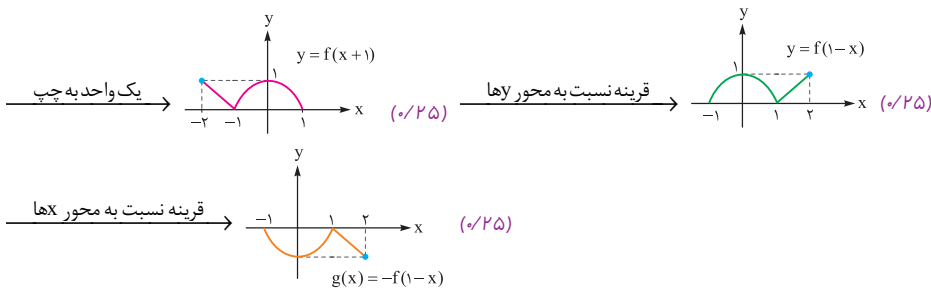
(مشابه تمرین ۲ - صفحه ۱۲)

برای رسم نمودار تابع $y = f(ax+b)$ ($b > 0$)، کافی است ابتدا نمودار $y = f(x)$ را b واحد در راستای محور x ها به چپ منتقل کنیم و سپس در نمودار حاصل، طول نقاط را بر a تقسیم کنیم. هم‌چنین نمودار $y = -f(x)$ از قرینه نمودار $y = f(x)$ نسبت به محور x ها به دست می‌آید.

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓ با توجه به درسنامه فوق، برای رسم نمودار $y = -f(1-x)$ ، ابتدا نمودار $y = f(x)$ را یک واحد به سمت چپ

منتقل کرده و سپس در نمودار حاصل، طول نقاط بر (-1) تقسیم می‌شود؛ به عبارت دیگر نمودار حاصل، نسبت به محور y ها قرینه می‌شود و در نهایت، نمودار به دست آمده را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.



$[-1, 0] \rightarrow$ نزولی اکید (۰/۲۵)

$[0, 1] \rightarrow$ صعودی اکید (۰/۲۵)

$[1, 2] \rightarrow$ نزولی اکید (۰/۲۵)

مقادیر a و b را به گونه‌ای بیابید که چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 5x + b$ بر $x^2 - x - 2$ بخش پذیر

باشد. (۲۵/۱ نمره)

راهنمای تصحیح <<

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 2 \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\begin{cases} f(-1) = a + b + 3 = 0 \text{ (۰/۲۵)} \\ f(2) = 4a + b + 6 = 0 \text{ (۰/۲۵)} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -1, b = -2 \\ \text{(۰/۲۵)} \quad \text{(۰/۲۵)} \end{matrix}$$

(مشابه تمرین ۷ - صفحه ۲۲)

دربن Box

باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای $ax + b$ برابر است با $f(-\frac{b}{a})$. به عبارت دیگر، برای به دست آوردن تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ ، کافی است ریشه مقسوم‌علیه را در چندجمله‌ای $f(x)$ به جای x ها قرار دهیم.

بدیهی است که چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ وقتی بخش پذیر است که $f(-\frac{b}{a}) = 0$ باشد.

پاسخ خیلی تشریحی >

چون چند جمله $f(x)$ بر $f(x) = (x-2)(x+1)$ بخش پذیر است، پس بر عوامل اول آن یعنی بر هریک از عوامل $x-2$ و $x+1$ نیز بخش پذیر است. بنابراین داریم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2, x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ f(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 + 4a - 10 + b = 0 \\ -2 + a + 5 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = -6 \\ a + b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + b = -6 \\ -a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1, b = -2$$

ضابطه تابع مثلثاتی به شکل $y = a \cos(bx) + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن 4π ، مقدار ماکزیم آن ۵ و مقدار مینیم آن برابر ۳- باشد. (۱/۲۵ نمره)

۵

$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = -3 \end{cases} \begin{matrix} (0/25) \\ (0/25) \end{matrix} \Rightarrow c = 1, |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4 \begin{matrix} (0/25) \\ (0/25) \end{matrix}$$

$$\frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{4} \quad (0/25)$$

$$y = \pm 4 \cos\left(\frac{1}{4}x\right) + 1 \quad (0/25)$$

(مشابه تمرین ۳ - صفحه ۳۴)

در توابع $y = a \cos(bx) + c$ و $y = a \sin(bx) + c$ داریم:

$$\max = |a| + c, \min = -|a| + c, T = \frac{2\pi}{|b|}$$

راهنمای تصحیح <<

درجین Box

۶ معادله مثلثاتی $\sin x \cos x \cos 2x = \frac{1}{8}$ را حل کنید و جواب‌های واقع در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ را به دست آورید. (۷۵ نمره)

راهنمای تصحیح <<

$$\frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{8} \quad (0 / 25) \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{4} = \sin \frac{\pi}{6} \quad (0 / 25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \quad (0 / 25) \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24} \quad (0 / 25) \end{cases}$$

جواب‌های واقع در $(0, \frac{\pi}{4})$ به ازای $k = 0$ به دست می‌آیند و عبارت‌اند از:

$$\frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24} \quad (0 / 5)$$

(مشابه مثال صفحه ۴۰)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ می‌دانیم $\frac{1}{4} \sin 2\alpha \cos \alpha = \sin \alpha \cos \alpha$ پس داریم:

$$\frac{\sin x \cos x \cos 2x}{\frac{1}{4} \sin 2x} = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{4} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \sin 4x = \frac{1}{8} \Rightarrow \sin 4x = \frac{1}{4}$$

می‌دانیم اگر $\sin u = \sin \alpha$ ، آن‌گاه $\begin{cases} u = 2k\pi + \alpha \\ u = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sin 4x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 4x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+4} \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \\ x = \frac{k\pi}{2} + \frac{5\pi}{24} \end{cases}$$

برای یافتن جواب‌های واقع در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ کافی است، به جای k مقادیر صحیح مانند $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ را قرار

دهیم. در این‌جا فقط به ازای $k = 0$ ، جواب‌های به دست آمده در بازه $(0, \frac{\pi}{4})$ قرار می‌گیرند که عبارت‌اند از:

$$x = \frac{\pi}{24}, x = \frac{5\pi}{24}$$

حد توابع زیر را به دست آورید. (۱/۲۵ نمره) [] نماد جزء صحیح است

۷

الف) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} \frac{[x] - \cos x}{1 - \sin x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^6 - 3x^2 + 1}{2x - 3x^3 + \sqrt{x}}$

الف) $\frac{[\frac{\pi}{4}]^-}{1-1^-} = \frac{1}{0^+} (0/25) = +\infty (0/25)$

(مشابه مثال صفحه ۵۳)

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^6}{-3x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{3}x = -\infty (0/25)$

(مشابه تمرین ۳ - صفحه ۶۹)

راهنمای تصحیح

همواره داریم:

نکته

$1 \pm \sin x \geq 0, 1 \pm \cos x \geq 0$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ توضیح این که در قسمت (الف)، می‌دانیم حد مخرج به‌ازای $x = \frac{\pi}{4}$ صفر می‌شود. اما بنا بر نکته فوق چون همواره

$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} 1 - \sin x = 0^+$ پس: $1 - \sin x \geq 0$

مجانبات‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4x}$ را بیابید و سپس نمودار تابع f را در اطراف مجانبات قائم آن رسم

کنید. (۷/۵ نمره)



$$f(x) = \frac{x-1}{x(x^2+4)} \Rightarrow x(x^2+4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (۰/۲۵)}$$

مجانبات قائم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2+4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ (۰/۵)}$$

مجانبات افقی

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x(x^2+4)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x(x^2+4)} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \text{ (۰/۲۵)}$$



(مشابه مثال صفحه ۵۷)

برای رسم نمودار یک تابع در اطراف مجانبات قائم آن به صورت زیر عمل می‌کنیم:

(۱) مجانبات قائم تابع را می‌یابیم.

(۲) در صورتی که تابع در همسایگی چپ یا راست مجانبات قائم $x = a$ تعریف شده باشد، حدهای چپ یا راست تابع را در $x = a$ به دست می‌آوریم و با توجه به مقادیر به دست آمده، نمودار تابع را در اطراف مجانبات قائم رسم می‌کنیم.

راهنمای تصحیح <<

دروس Box

۹ معادله نیم‌مماس چپ تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در نقطه به طول $x = -2$ بنویسید. (۱ نمره)

$x = -2 \Rightarrow y = 0$ (۰/۲۵)

$$f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 - 4 - 0}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = -4 \quad (۰/۵)$$

معادله نیم مماس چپ: $y - 0 = -4(x + 2) \Rightarrow y = -4x - 8$ (۰/۲۵)

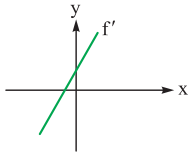
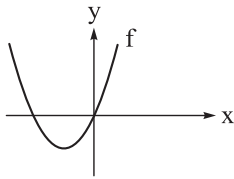
(مشابه مثال صفحات ۸۶ و ۸۷)

همان شیب نیم‌مماس راست در $x = a$ و $f'_-(a)$ ، همان شیب نیم‌مماس چپ در $x = a$ می‌باشند.

راهنمای تصحیح <<

نکته >>

۱۰ سهمی مقابل، نمودار تابع f است. نمودار تابع مشتق آن را رسم کنید. (۵/۵ نمره)



(۵/۵)

راهنمای تصحیح

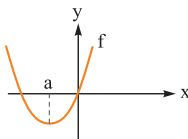
(مشابه تمرین ۱۰ - صفحه ۱۰۰)

درین Box

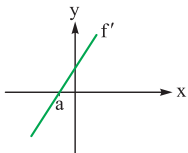
اگر نمودار تابع پیوسته و مشتق پذیر f را در اختیار داشته باشیم، برای رسم نمودار f' از نکات زیر استفاده می‌کنیم:

- ۱) در هر بازه‌ای که تابع f نزولی اکید باشد، نمودار f' در آن بازه زیر محور x قرار می‌گیرد.
- ۲) در هر بازه‌ای که تابع f صعودی اکید باشد، نمودار f' در آن بازه بالای محور x قرار می‌گیرد.
- ۳) در هر بازه‌ای که تابع f ثابت باشد، نمودار f' در آن بازه بر محور x منطبق می‌شود.
- ۴) در هر نقطه‌ای که نمودار f دارای مماس افقی باشد، نمودار f' در آن نقطه محور x را قطع می‌کند.

نمودار f در بازه $(-\infty, a)$ نزولی اکید است، پس نمودار f' باید در این بازه زیر محور x رسم شود. پاسخ خیلی تشریحی



در $x = a$ ، نمودار f دارای مماس افقی است، پس نمودار f' در $x = a$ محور x را قطع می‌کند. نمودار f در بازه $(a, +\infty)$ صعودی اکید است، پس نمودار f' باید در این بازه بالای محور x رسم شود، چون تابع f طبق فرض درجه ۲ بود، پس f' خطی می‌شود و با توجه به نکات فوق، نمودار آن به صورت زیر خواهد بود:



مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). (۲ نمره)

الف) $f(x) = \frac{(7x^2 - 4x)^9}{\sqrt{6x-1}}$

ب) $g(x) = 5 \tan(\pi x) - \cos^7(x^2 - x)$

مشاوره این تیپ سوآلا با همین ادبیاتو و با همین شکل و شمایل همیشه پای ثابت امتحانات نهایی هستن.

راهنمای تصحیح <<

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{\overbrace{9(14x-4)(7x^2-4x)^8}^{(-/5)} \cdot \overbrace{\sqrt{6x-1}}^{(+/25)} - \frac{6}{2\sqrt{6x-1}} \cdot \overbrace{(7x^2-4x)^9}^{(-/25)}}{\underbrace{6x-1}_{(-/25)}}$$

ب) $g'(x) = \underbrace{5\pi(1 + \tan^2(\pi x))}_{(+/25)} + \underbrace{4(2x-1)\sin(x^2-x)\cos^6(x^2-x)}_{(-/75)}$

(مشابه تمرین ۱۳ و ۱۵ صفحه ۱۰۱)

کلاس Box

۱) $y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

۲) $y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

۳) $y = (f(x))^n \Rightarrow y' = nf'(x)(f(x))^{n-1}$

۴) $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$

۵) $y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$

۶) $y = \tan u \Rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u)$

۷) مشتق توابع مثلثاتی توان دار را علاوه بر این که می توان از فرمول مشتق $y = (f(x))^n$ به دست آورد، می توان از دستور زیر نیز محاسبه کرد:

$(\text{خود عبارت})^{n-1} \times (\text{مشتق پایه بدون احتساب مشتق کمان}) \times (\text{مشتق کمان}) \times (\text{توان})$

به طور مثال در تابع $y = \sin^3 \sqrt{x}$ ، توان برابر ۳ و کمان برابر \sqrt{x} است. پس:

$$y = \sin^3 \sqrt{x} \Rightarrow y' = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \cos \sqrt{x} \times \sin^2 \sqrt{x}$$

۱۲ مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 1| [2x]$ را در $x = 1$ بررسی کنید. (انمره)

راهنمای تصحیح << f در $x = 1$ پیوسته است. (۰/۲۵)

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1) \times 2}{x - 1} = 4 \quad (۰/۲۵)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1) \times 1}{x - 1} = -2 \quad (۰/۲۵)$$

چون $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس f در $x = 1$ مشتق ناپذیر است. (۰/۲۵)

(مشابه تمرین ۸ - صفحه ۱۰۰)

پاسخ خیلی تشریحی ✓ تابع f در $x = 1$ پیوسته است، زیرا:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} |x^2 - 1| [2x] = 0 \times 2 = 0$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x^2 - 1| [2x] = 0 \times 1 = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

همچنین داریم:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1| [2x] - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^2 - 1) \times 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1) \times 2}{x-1} = 4$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x^2 - 1| [2x] - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1) \times 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)(x+1) \times 1}{x-1} = -2$$

چون $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس تابع f در $x = 1$ مشتق ناپذیر است.

گنجایش ظرفی ۴۰ لیتر مایع است. در لحظه $t = 0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقی مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطه $V = 40(1 - \frac{t}{100})^2$ به دست آید، تعیین کنید در چه لحظه‌ای، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم، برابر آهنگ متوسط آن در بازه زمانی $[0, 100]$ می‌شود؟ (۷۲۵ نمره)

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(100) - V(0)}{100 - 0} = \frac{0 - 40}{100} = -\frac{40}{100} \quad (0/25)$$

$$V'(t) = 40 \times 2 \times (-\frac{1}{100})(1 - \frac{t}{100}) \quad (0/5)$$

$$40 \times 2 \times (-\frac{1}{100})(1 - \frac{t}{100}) = -\frac{40}{100} \quad (0/25) \Rightarrow 2 - \frac{t}{50} = 1 \Rightarrow \frac{t}{50} = 1 \Rightarrow t = 50 \quad (0/25)$$

(تمرین ۱ - صفحه ۱۱۰)

آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازه $[x_1, x_2]$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

هم‌چنین آهنگ لحظه‌ای تابع f در $x = a$ برابر است با $f'(a)$.

راهنمای تصحیح <<

درس‌Box

۱۴ با رسم جدول تغییرات نشان دهید که تابع $f(x) = -2x^3 + x^2 + 4x + 1$ در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح <<

$$f'(x) = -6x^2 + 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -\frac{2}{3}$$

x		$-\frac{2}{3}$		1	
f'	-	0	+	0	-
f	↘		↗		↘

(۰/۲۵)

$(-\infty, -\frac{2}{3}) \leftarrow$ نزولی اکید (۰/۲۵)

$[-\frac{2}{3}, 1] \leftarrow$ صعودی اکید (۰/۲۵)

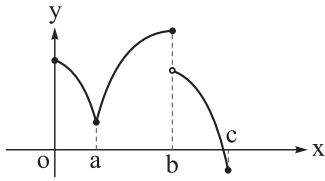
$(1, +\infty) \leftarrow$ نزولی اکید (۰/۲۵)

(مشابه تمرین ۱۱ - صفحه ۱۲۶)

دربش Box

برای تعیین وضعیت یکنوایی تابع پیوسته f ، ابتدا مشتق این تابع را می‌یابیم و سپس در یک جدول به نام جدول تغییرات، f' را تعیین علامت می‌کنیم. در هر بازه که $f' > 0$ باشد، تابع f در آن بازه صعودی اکید و در هر بازه که $f' < 0$ باشد، تابع f در آن بازه نزولی اکید خواهد بود.

شکل مقابل نمودار تابع f است. طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و مطلق را در صورت وجود بیابید. (۱ نمره)



راهنمای تصحیح

طول مینیمم نسبی: $x = a$ (۰/۲۵)

طول ماکزیمم نسبی و مطلق: $x = b$ (۰/۵)

طول مینیمم مطلق: $x = c$ (۰/۲۵) (صفحه ۱۱۴)

اگر $x = 2$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی و $x = 1$ طول نقطهٔ عطف تابع f با ضابطهٔ $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx$ باشد، a و b را به دست آورید. (۱ نمره)

راهنمای تصحیح <<

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b \quad (۰/۲۵) \Rightarrow f''(x) = 12x + 2a \quad (۰/۲۵)$$

$$f''(1) = 0 \Rightarrow a = -6 \quad (۰/۲۵), \quad f'(2) = 0 \Rightarrow b = 0 \quad (۰/۲۵)$$

(مشابه تمرین ۷ صفحه ۱۲۶ و تمرین ۴ - صفحه ۱۳۶)

درس Box

 ۱) اگر $A(\alpha, \beta)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع f بوده و این تابع در نقطهٔ A مشتق پذیر باشد، آن گاه:

$$f'(\alpha) = 0 \quad (\text{ب}) \qquad f(\alpha) = \beta \quad (\text{الف})$$

 ۲) اگر $A(\alpha, \beta)$ نقطهٔ عطف تابع f بوده و f'' در نقطهٔ A موجود باشد، آن گاه:

$$f''(\alpha) = 0 \quad (\text{ب}) \qquad f(\alpha) = \beta \quad (\text{الف})$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ چون $x = 2$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است، پس $f'(2) = 0$ هم چنین $x = 1$ طول نقطهٔ عطف تابع f می باشد، پس $f''(1) = 0$ داریم:

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b \xrightarrow{f'(2)=0} 24 + 4a + b = 0$$

$$f''(x) = 12x + 2a \xrightarrow{f''(1)=0} 12 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -12 \Rightarrow a = -6$$

$$24 + 4a + b = 0 \xrightarrow{a=-6} 24 - 24 + b = 0 \Rightarrow b = 0$$

جدول رفتار و نمودار تابع $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ را رسم کنید. (۵/۱ نمره)

۱۷

راهنمای تصحیح

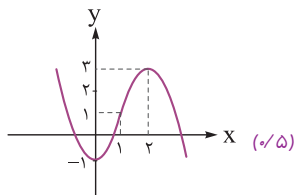
$D = \mathbb{R}$

$y' = -3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ یا $x = 2$ (۵/۲)

$y'' = -6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ (۵/۳)

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'		-	+	+	-
y''		⊕	⊕	⊖	⊖
y	$+\infty$	↘	-1	↗	↘

(۵/۴)



(مشابه تمرین ۱ - قسمت ب - صفحه ۱۴۴)

کارتن Box

برای رسم جدول رفتار و نمودار توابع چندجمله‌ای و از جمله تابع درجه ۳، از آن جایی که دامنه این توابع برابر \mathbb{R} و مشتق‌های اول و دوم آن‌ها موجود بوده و نیز هیچ‌گونه مجانبی ندارند، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

- ۱) مشتق اول تابع را می‌یابیم و نقاط بحرانی تابع را مشخص می‌کنیم.
- ۲) مشتق دوم تابع را می‌یابیم و در صورت وجود، نقطه یا نقاط عطف تابع را می‌یابیم.
- ۳) در صورت امکان، محل تلاقی نمودار را با محورهای مختصات تعیین می‌کنیم.
- ۴) جدول تغییرات و تقعر تابع را تشکیل می‌دهیم.
- ۵) با توجه به جدول تغییرات و تقعر تابع، نمودار آن را رسم می‌کنیم.